xxxx年xx月 运 筹 学 学 报 第xx卷 第xx期
xxx, xxxx Operations Research Transactions Vol.xx No.xx

DOI: 10.15960/j.cnki.issn.1007-6093.2019.00.000

双层规划的一阶条件方法：以道德风险理论为例*

柯荣住[1] 张进[2,†]

摘要 本文首先对双层规划的一个特殊例子即道德风险模型中使用的一阶条件方法(FOA)做简要的梳理，然后提出一种更为一般的使FOA有效的原则与方法。新的方法主要依赖于代理人对委托人设置的目标的最优反应映射是否存在不动点，这个性质不要求原问题与用一阶条件放松以后的问题之间的约束集等价，从而也不要求代理人的期望效用对行动具有全局凹性。在新方法下，我们用较为简单的方法证明FOA在以下两种情形之一有效，即如果分布函数是概率分布的凸组合或者分布函数来自某些特殊的指数族分布。

关键词 委托代理，道德风险，一阶条件方法，不动点

中图分类号 O224, O221.2

2010 数学分类号 90C26, 90C30, 90C31, 90C33, 90C46

On the First Order Approach for Bilevel Programming: Moral Hazard Case*

KE Rongzhu[1] ZHANG Jin[2,†]

Abstract We revisit the first-order approach (FOA) in a classical setting of moral hazard model with multi-dimensional signal. After providing formal justification of Lagrangian duality, we reformulate the issue of validiting the FOA as an issue of the existence of a fixed point of the agent's best reaction to the principal's targeted effort level. Therefore, it is unnecessary to show the validity based on the global concavity of the agent's expected under a subclass of monotone contract. The new method allows the relaxation of several requirements of previous approaches. We generalize some results of Sinclair-Desgagne (1994)[24] and Conlon (2009a)[2] to validate the FOA for either the mixture probability model without the likelihood ratio order, or certain exponential family distributions with a bounded likelihood ratio.

Keywords Principal-agent, Moral hazard, First-order approach, Fixed-point

Chinese Library Classification O224, O221.2

2010 Mathematics Subject Classification 90C26, 90C30, 90C31, 90C33, 90C46

收稿日期: xxxx-xx-xx

* 基金项目: 国家自然科学基金（No. 71672177, 11971220），广东省自然科学基金（No.2019A1515011152），深圳市科技计划资助（No. RCYX20200714114700072）

1. 浙江大学经济学院，浙江大学数字经济研究中心，杭州 310058; School of Economics, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China

2. 南方科技大学数学系，深圳应用数学中心，深圳 518055; Department of Mathematics and National Center for Applied Mathematics Shenzhen, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China

† 通信作者 E-mail: zhangj9@sustech.edu.cn

0 引 言

双层规划是运筹与最优化领域的前沿课题（Dempe, 2002[4]；Dempe and Zemkoho, 2020[5]）。最经典的经济与管理中的双层规划问题可以上溯到1930 年代的Stackelberg 模型。经济学文献中于1970 年代兴起的委托代理理论是双层规划的一个重要研究方向，迄今为止已经取得丰硕的成果。值得一提的是，国内关于双层规划的研究大致始于1990 年代，中科院应用所与系统所的研究组率先开始了相关研究，之后，复旦大学、上海交通大学、武汉大学、西安电子科技大学、上海大学、天津大学等相继加入，在双层规划的算法及其在管理科学、机器学习、电力市场等领域的应用等方面做出了很多工作。本文关注的重点问题是双层规划视角下，委托代理理论中的道德风险问题。

道德风险理论是现代经济学的一个重要组成部分。自Mirrlees(1975)[22]的开创性工作以来，经由Holmstrom(1979)[10]等人的推进，目前已经在经济、管理、政治科学、金融等领域得到广泛的应用（柯和李，2016[25]；聂2016[26]），Mirrlees与Holmstrom 也分别获得1996年与2016 年诺贝尔经济学奖。但在道德风险理论中，一个长期存在的基础性问题是一阶条件方法(the first-order approach (FOA)) 的有效性。由于在道德风险模型中，代理人对委托人给与的合同的最优反应作为委托人最优化问题的约束是一个无穷维约束，为了简便处理问题并得到解的刻画，研究者们通常用代理人的最优反应的一阶条件来代替原先的无穷维约束，这被称谓一阶条件方法。很显然，因为一阶条件是代理人最优反应的必要条件而非充要条件，用一阶条件来代替原先的条件便放大了原问题的约束集，这样委托人得到的“最优解”有可能不落在原先的约束集里，那么委托人所想要的合约便无法真正得以实施。这时候，一阶条件方法失效了。什么情况下一阶条件方法会有效？一种简单的直观的方法是，让放松以后的约束集与原问题的约束集等同，也即说，让一阶条件成为代理人最优反应的充要条件。要做到这点，要求代理人的期望效用函数对他的行动而言具有全局凹性。沿着这个思路，Rogerson (1985)[23],Jewitt (1988)[12], Sinclair-Desgagne (1994)[24], 和Conlon (2009)[2] 等提出或改进使代理人效用函数全局凹性的条件与方法。其中，Rogerson (1985)[23] 的充分条件最为知名，在教科书中广泛提及，它要求产出的概率分布函数凸性条件(the convexity of distribution function condition(CDFC))和单调似然率性质(the monotone likelihood ratio property (MLRP))。由于大部分常用的分布函数不满足CDFC，Jewitt (1988)[12]通过引进一种保凹性变化，对效用函数端增加了一些约束来放松分布函数端的CDFC 条件。

然而，Rogerson (1985)[23]和Jewitt (1988)[12] 的方法都不容易被推广到产出变量是多维的情形。在多维随机变量的情形下，维持期望效用函数的全局凹性变得更为困难，需要比CDFC和MLRP苛刻得多的条件。Conlon (2009a)[2] 给出了多维变量情况下保凹变换的一个充要条件，它在维数越多的时候，越难被满足；* 而且他也证明Jewitt (1988)[12]的优美结果在多维情况下基本上没有简洁的对应表达形式。问题是，有没有可能在不需要全局凹性的条件下使一阶条件方法有效？柯(2009[15],2010[16])首先提出用不动点方法来放松全局凹性；最近Kirkegaard(2017a[18],2017b[19]) 提出一种利用比较线性化凹包络的方

*除了MLRP, Conlon(2009a[2],2009b[3])还用到两个新条件，即递增集概率递减（(the nondecreasing increasing-set probability (NISP)) 和递增集概率凹性条件(the concave increasing-set probability (CISP))。前者保证单调随机变量的期望值对行动的单调性(充要条件)，后者保证单调随机变量期望值对行动的凹性(保凹变化的充要条件)，是CDFC在多维情况下的一个推广。因此看起来Rogerson方法拓展的空间不大，只能限于MLRP，NISP和CISP。

式来某种程度上放宽全局凹性；Jung和Kim(2015)[11] 也提出用信息空间的方法来使一阶条件方法有效。后两种方法虽然与经典的全局凹性的方法区别不是很大，但仍然得到了一些新结果，尤其是在多维的情况下。

本文主要的贡献是比较系统地梳理不动点方法，并提出可以突破全局凹性的方向。我们从优化理论的角度，在更为一般的效用函数假定下首先证明了拉格朗日乘子的存在性与唯一性，并讨论这些乘子对参数的连续性质，进而讨论不动点的存在性问题。与通常意义上要求放松问题与原问题的约束集的等价性不同，不动点方法并不要求两个约束集等价，我们只需要验证在放松问题的最优解的地方，该最优行动刚好是代理人最优反应映射的一个不动点即可。传统的全局凹性方法是不动点存在的特例，因为在全局凹性下，最优反应映射是连续的因此根据Brower 不动点定理它具有不动点。但除了Brower不动点定理之外，可以有另外的一些更一般的不动点定理，这为探讨一阶条件方法的有效性提供了新的方向。我们也用一些例子来说明没有全局凹性下不动点方法如何使得一阶条件方法有效。

于是本文分成六个部分。在接下去的第二部分是模型设置，第三部分是介绍FOA以及一些初步的理论准备，第四部分重点介绍如何从不动点的角度来看FOA的有效性并提出一些新的证明FOA 有效的方法以及例子。第五部分是结论。一些技术性的证明，我们将其放在第六部分附录。

1 模型设置

我们考虑一个更为一般的委托代理道德风险模型(多维产出信号)。代理人选择一维的行动$a \in \mathbb{A} \equiv [0, \bar{a}]$, 该行动不为委托人所观察，因此无法硬性规定代理人选择何种努力水平。代理人的行动会影响随机产出$\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^K$，这种影响是通过产出的概率分布(p.d.f.) $f(\mathbf{x}, a)$进行，我们假定$f(\mathbf{x}, a)$对a是连续光滑的(至少二阶可微)，并且跟随文献的传统，假定其支撑集不依赖于a。

代理人的效用函数(Bernoulli)为$u(w, a)$,这里w是代理人的货币工资。除了连续光滑以外，我们对代理人的效用函数还做了以下假设：

A1: $u_w(., a) > 0$, $u_{ww}(., a) < 0$, 这里下标表示偏导数。†

基于可以观察到的产出信号$\mathbf{x}$，委托人选择工资合约$w = w(\mathbf{x})$。由于有最低工资约束，委托人无法无限惩罚代理人：

A2: 工资$w(\mathbf{x})$的下界为$\underline{w}$, 这里$\underline{w}$ 是外生给定的最低工资，并满足条件$u(\underline{w}, a) > -\infty$对所有的$a \in \mathbb{A}$；‡并且, 为了方便我们假定$u(\underline{w}, 0) = \underline{U}$，这里$\underline{U}$是指代理人的外部机会。§

与Sinclair-Desgagne (2007)[6] 和Conlon (2009a)[2] 一致,我们让利润函数$\pi(\mathbf{x})$ 由产出决定。委托人的效用函数$v(.)$ 定义在净值$(\pi - w)$上。委托人的效用函数符合以下假设：

A3: $v(.)$光滑，严格递增并且具有弱凹性。

---

†在某些例子里，我们可能需要进一步假设(a) $u_a(., a) < 0$, $u_{aa}(., a) \leqslant 0$ 和(b) $u_{wa} \leqslant 0$, $u_{wwa}(., a) \leqslant 0$。

‡这个条件有助于解的存在性，在本文中，我们不打算讨论解的存在性问题，有关解的存在性的最新结果见(Jewitt Kadan, and Swinkels (2008)[13] 和Kadan, Reny and Swinkels (2017)[14]，以及Ke和Xu(2021)[17] 的最新结果。在本文中，我们总是假定原问题的解是存在的。

§这个假定意味这代理人在当前最低工资与外部机会之间没有套利。

我们可以把委托人的期望效用函数写成

$$V(w,a)=\int v(\pi(\mathbf{x})-w(\mathbf{x}))f(\mathbf{x},a)d\mathbf{x}$$

代理人的期望效用函数写成

$$U(w,a)=\int u(w(\mathbf{x}),a)f(\mathbf{x},a)d\mathbf{x},$$

这里w实际上代表函数空间上的某个函数$w(.)$。

委托人面临的是以下最优化问题:

$$(P1) \qquad \max_{(w,a)} V(w,a),$$

满足:激励相容约束（the incentive compatibility (IC) constraint）

$$U(w,a)-U(w,a')\geqslant 0 \text{ for } \forall a'\in\mathbb{A}; \tag{IC}$$

和个人理性约束（the individual rationality (IR) constraint）

$$U(w,a)\geqslant \underline{U}, \tag{IR}$$

这里$\underline{U}>-\infty$即为外部保留效用；以及最低工资约束

$$w\geqslant \underline{w}. \tag{LL}$$

为了方便，在本文中，我们也用把IC约束写成$a\in a^{BR}(w)$,这里，符号

$$a^{BR}(w)\equiv \arg\max_{a'} U(w,a')$$

表示代理人对合约w的最优反应。

与Conlon(2009)[2]或Alvi(1997)[1]相比,本文的模型设置具有相对的一般性。在第三部分正式介绍不动点方法之后，我们会在这个一般设置下增加一些额外的约束来推导一些应用。

2 FOA的定义与拉格朗日对偶性

在这一节，我们正式定义FOA并且说明为何放松后的问题可以用拉格朗日方法来求解。

2.1 FOA的刻画

对于原来的IC约束，既然代理人最大化他自身的效用函数，那么我们可以对a求导，其必要条件是以下定义的一阶条件，我们称为放松的IC约束(RIC):

$$U_a(w,a)=0 \text{ if } a\in(0,\bar{a});\ U_a(w,a)\leqslant 0 \text{ if } a=0; \text{ and } U_a(w,a)\geqslant 0 \text{ if } a=\bar{a}. \tag{RIC}$$

当 (IC)放松为(RIC)的时候,原问题(P1)变成

$$(P2) \qquad \max_{(w,a)} V(w,a), \text{ s.t. (IR)，(RIC) and (LL).}$$

用$\mathcal{F}$ 记为原问题的可行集，即满足(IC),(IR)和(LL)的集合(w,a)，用$\mathcal{F}^R$记为放松后问题的可行集，即满足(RIC)，(IR)和（LL）。很显然我们有$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^R$, 因此(P2)有可能得到一个解，但它不落在$\mathcal{F}$ 之中。FOA有效意味着这这种情况不会发生，因此两个问题是等价的，正式定义如下。

定义 2.1 *称FOA有效如果*$\max_{(w,a)\in\mathcal{F}} V(w,a) = \max_{(w,a)\in\mathcal{F}^R} V(w,a)$.

在Rogerson (1985)[23]的经典文章中，标准的证明FOA有效的程序是，首先将RIC 等式约束进一步放松成不等式约束，构造以下双重放松的问题

$$(P3) \qquad \max_{(w,a)}\{V(w,a) : U(w,a) \geqslant \underline{U}\ ,\ U_a(w,a) \geqslant 0\},$$

这里不等式约束$U_a(w,a) \geqslant 0$进一步放松了RIC。其次，双重放松问题(P3)可以用通常的Kuhn-Tucker方法来解，然后保证代理人的效用函数在(P3)的解下是全局凹的，因此(P3)问题的解最终还是落到$\mathcal{F}$ 上，这样(P3)和(P1)等价，那么当然(P2) 和(P1)等价，因而FOA有效。在本文中，我们不用双重放松的方法，直接验证(P2)的解是否可以支持某种不动点。为此，我们需要先刻画(P2)解的性质。

2.2 (P2)的解的刻画

对问题(P2)的解法，一般的程序是Grossman-Hart(1983)[8]的两步分解法。在第一步给定a 情况下先解出最优的w，然后在第二步再解出最优的a。我们也用同样的方法。

2.2.1 给定努力水平下(P2)的解

给定a, (P2) 变成

$$\max_{w} V(w,a) : s.t.(IR),(RIC)and(LL). \tag{P2|a}$$

。我们假设(P2|a) 总是有解，对任意a。

为了简单起见，我们在此忽略一阶条件等式不成立的角点解的情况。因为如果$a=0$并且$U_a(w,0) < 0$，这时候最优的合约是最低工资。如果$a=\bar{a}$，那么最优合同不可能使得$U_a(w,\bar{a}) > 0$，这种情况不影响我们理论的一般性。剔除了角点解特殊情况以后，问题(P2|a) 是一个更为简洁的等式与不等式约束下的优化问题，尽管他仍然是一个无穷维优化问题。根据Mirrlees (1975)[22]和Holmstrom (1979)[10], 我们构造拉格朗日函数

$$L(w,a;\lambda,\mu) = V(w,a) + \lambda[U(w,a) - \underline{U}] + \mu U_a(w,a), \tag{2.1}$$

这里$\lambda \in \mathbb{R}_+$和$\mu \in \mathbb{R}$是两个拉格朗日乘子，分别对应于IR和RIC约束。以下的第一个结论是正式证明拉格朗日乘子是存在的，并且问题可以由拉格朗日方法来解¶

¶拉格朗日方法的可用性本身其实并不是一个显然的问题，尤其在无穷维的优化问题里。这里我们主要是可以利用一些较好的拉格朗日对偶性。有关无穷维优化问题中的乘子，见Luenberger(1969)[21]的经典文献。

引理 2.1 *假定对每个a，A1-A3都成立并且(P2|a) 有解w^*. 则(i) w^* 是$L(w,a;\lambda,\mu)$ 的一个稳定点只要$w^* \geqslant \underline{w}$；(ii)存在乘子集合*

$$(\lambda(a),\mu(a)) = \{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : U(w_{\lambda,\mu}(.,a),a) \geqslant \underline{U},\ U_a(w_{\lambda,\mu}(.,a),a) = 0\} \tag{2.2}$$

满足RIC和IR约束并且乘子结合$(\lambda(a),\mu(a))$对a是上半连续且集合是凸的。

引理2.1 实际上是一个基本性结论，它保证了有界乘子的存在性以及进一步可以对问题的解给出刻画。这个结果成立的主要假设是$v' > 0$以及$u_w > 0$，这样的假设意味着$U(w,a)$和$U_a(w,a)$的Frechet导数在w^*附近对于任意增量函数$h \geqslant 0$ 不可能都是零。‖

基于引理2.1, 稳定点满足一阶条件

$$v'(\pi(\mathbf{x}) - w) - \mu u_{aw}(w,a) = u_w(w,a)[\lambda + \mu l_a(\mathbf{x},a)], \tag{2.3}$$

只要$w \geqslant \underline{w}$, 这里

$$l_a(\mathbf{x},a) \equiv \frac{\partial \log f(\mathbf{x},a)}{\partial a}$$

即为似然率。我们用记号$w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a)$表示一阶条件(2.3)的一个解，并把它正式定义为Mirrlees-Holmstrom合约。

定义 2.2 *称合约$w = w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a)$为Mirrlees-Holmstrom (MH)合约如果$w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a)$ 满足一阶条件(2.3)给定参数$(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$和$a \in \mathbb{A}$.*

每个MH合约都有三个参数(λ,μ,a), 给定这些参数(λ,μ,a), 可能有多个MH合约因为(2.3)的解未必是唯一的。但有两种常用情况下，MH合约和拉格朗日乘子都是唯一的，这两种情况实际上是我们重点研究的情形。下面推论就给出这个结果。

推论 2.1 *假定A1-A3成立并且代理人的效用函数可分即$u_{wa} = 0$。则对于每个a, (i) 存在一个唯一的MH合约$w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a)$作为(P2|$a$)的解并满足RIC和IR约束；(ii)乘子集合(2.2)是单集因此$(\lambda(a),\mu(a))$是a的连续函数并且几乎处处可微。*

推论2.1中的唯一性结果主要来自效用比$\frac{v'(\pi(\mathbf{x})-w)}{u'(w)}$ 对w 的单调性(利用委托人与代理人效用的凹性)。在这个情形下，MH合约可以写作文献上更为熟悉的形式

$$\frac{v'(\pi(\mathbf{x}) - w)}{u'(w)} = \lambda + \mu l_a(\mathbf{x},a), \tag{2.4}$$

上述方程确定了唯一的$w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a)$。在文献中，Jewitt, Kadan, and Swinkels (2008)[13]也注意到了更为特殊情形下乘子的唯一性，尽管他们的主要目的不是为了FOA的有效性。

当效用函数不可分的时候，如果我们假设$\mu \geqslant 0$,** 那么在一些情况下，MH合约与拉格朗日乘子的唯一性仍然成立。

‖给定Frechet可微性,对于一个泛函算子$T(w)$，它在w处的Frechet导数等于$\lim_{\alpha\to 0} \frac{T(w+\alpha h)-T(w)}{\alpha}$ (进一步讨论见Luenberger (1969, P172)[21])。

**注意到在问题(P2|a)中(RIC)作为等式约束， 对应的乘子μ 并不一定非负， 因此根据定义(2.1)，FOA在$\mu < 0$情形下也可以有效。但是在一些比较有经济意义的假设下，例如委托人风险中性，或者代理效用可分且产出分布符合一阶随机占优(FOSD)，这种情况下，只要FOA有效，那么必有$\mu > 0$。Holmstrom (1979)[10]正式证明了这个结论。

推论 2.2 *假定A1-A3成立，并且$u_{wa} \leqslant 0$和$u_{wwa} \leqslant 0$。则对任意a，(i)存在唯一的MH合约$w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a)$作为问题(P3)的解；(ii) 存在唯一的拉格朗日乘子$(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 满足互补松弛约束$U(w_{\lambda,\mu}(.,a),a) \geqslant \underline{U}$，$\lambda[U(w_{\lambda,\mu}(.,a),a) - \underline{U}] = 0$，和$\mu U_a(w_{\lambda,\mu}(.,a),a) = 0$，$U_a(w_{\lambda,\mu}(.,a),a) \geqslant 0$.*

在推论2.2的前提条件下，实际上我们证明了对于任意a，(P2$|a$)有解，并且解可以被唯一地刻画出来。在本文中，我们把这个解对应的拉格朗日乘子记为

$$(\lambda^*(a),\mu^*(a)) \in (\lambda(a),\mu(a)).$$

相应的最优MH合约记为

$$w^*(\mathbf{x},a) = w_{\lambda^*(a),\mu^*(a)}(\mathbf{x},a), \tag{MH*}$$

2.2.2 解(P2)的最优努力水平

在这个小节，我们刻画(P2)下最优努力水平。根据推论2.2，最优的努力水平a^*实际上可以由无约束优化问题确定：

$$max_{a\in\mathbb{A}} \int v(\pi(\mathbf{x}) - w^*(\mathbf{x},a))f(\mathbf{x},a)d\mathbf{x} \tag{2.5}$$

由于目标函数对a是连续的，因此必有最优解存在。我们在下面还可以进一步地说明a^*满足一阶条件即伴随方程

$$V_a(w^*(.,a),a) + \mu^* U_{aa}(w^*(.,a),a) = 0. \tag{AE}$$

推论 2.3 *假定推论2所列的条件成立，并且$a^* \in (0,\bar{a})$,以及在最优解处$U_{aa}(w^*,a^*) \neq 0$，则伴随方程(AE)在$a = a^*$处成立。*

Proof 我们用变分法来证明，思路与引理2.1(见附录5.1) 的证明思路类似。使任意的非负偏离函数$h(\mathbf{x}) \geqslant 0$满足$h(\bar{\mathbf{x}}) = h(\underline{\mathbf{x}}) = 0$。我们想要证$(z,a) = (0,a^*)$ 是拉格朗日函数$L(w^* + zh, a; \lambda,\mu)$ 的一个稳定点，并且乘子(λ,μ) 满足(IR)和(RIC)约束,这里$z \in \mathbb{R}$。当$U_{aa}(w^*,a^*) \neq 0$, 对于每个$h(\mathbf{x}) \geqslant 0$, 都存在向量$(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$使得

$$\begin{aligned} &y_1 U_{za}(w^*,a^*) + y_2 U_{aa}(w^*,a^*) \\ &\qquad = y_1 \int [u_{aw}(w^*,a^*) l_a(\mathbf{x},a^*) + u_w(w^*,a)] h(\mathbf{x}) f(\mathbf{x},a^*) d\mathbf{x} + y_2 U_{aa}(w^*,a^*) = 0, \end{aligned}$$

$$y_1 U_z(w^*,a^*) + y_2 U_a(w^*,a^*) = y_1 U_z(w^*,a^*) = y_1 \int u_w(w^*,a^*) h(\mathbf{x}) f(\mathbf{x},a^*) d\mathbf{x} > 0.$$

因此MFCQ约束规格成立，从而有界的乘子存在(Gauvin,1977[7])。因此$(z,a) = (0,a^*)$是拉格朗日函数$L(w^* + zh, a; \lambda,\mu)$的一个稳定点。那么，既然一阶条件对于任意$h(\mathbf{x}) \geqslant 0$都成立

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} L(w^* + zh, a^*; \lambda,\mu)\,\big|_{(z,a)=(0,a^*)} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a} L(w^* + zh, a^*; \lambda,\mu)\,\big|_{(z,a)=(0,a^*)} = 0 \end{cases}$$

因此一阶条件(2.3)在w^*处成立(因此属于MH合约)并且(AE)成立。

2.3 从不动点角度看FOA以及努力水平的实施

我们现在看努力水平是否能够真正被MH合约所实施。如果$a \in a^{BR}(w^*(\mathbf{x}, a))$, 也即$a$是映射$a^{BR}(w^*(\mathbf{x}, \cdot)) : A \rightrightarrows A$的一个不动点，那么$w^*(., a)$是实施努力水平$a$的一个最优合约。这里，合约里的参数$a$ 与最后代理人的最优反应相互一致，因为$w^*(., a)$ 是问题(P2)的最优解，因此不可能有比它带给委托人更高收益的合约。从这个意义上说，要使FOA 有效，至少映射$a^{BR}(w^*(\mathbf{x}, \cdot)) : A \rightrightarrows A$ 要有不动点。有可能每个a都是不动点，也有可能只有部分的不动点，FOA的有效性的充分必要条件是刚好(P2)的最优解a^*是一个不动点。我们将这个观察正式地表述为以下定理。

定理 2.1 *假定A1-A3成立，则FOA有效当且仅当至少有一个*$a^* \in [0, \bar{a}]$*使得*

$$(i)\ a^* \in \arg\max_{a \in \mathbb{A}} \int v(\pi(\mathbf{x}) - w^*(\mathbf{x}, a)) f(\mathbf{x}, a) d\mathbf{x} \tag{RO}$$

和

$$(ii)\ a^* \in a^{BR}(w^*(., a^*)), \tag{FP}$$

这里$w^*(\mathbf{x}, a)$ *是满足IR和RIC约束的MH合约且由(MH*) 所定义。*

Proof 充分性

很显然，既然$a^* \in a^{BR}(w^*(., a^*))$, 这说明$(w^*(., a^*), a^*)$在原问题的可行集里，同是它又是放松问题的解，因此它肯定是原问题(P1)的解，所以FOA有效。

必要性 如果FOA有效, 根据定义,问题(P1)和(P2)等价，对于拉格朗日函数(2.1), 我们有

$$\max_{(w,a) \in \mathcal{F}} V(w, a) = \max_{a \in \mathbb{A}} V(w^*(., a), a) = \max_{(w,a)} \{V(w, a) : \text{(IR) and (RIC)}\}.$$

因此两个条件都得到满足。

看起来定理2.1不复杂，但从这个角度，经典文献中证明FOA 有效的复杂过程可以大大被简化。我们可以把定理2.1和全局凹性方法作一比较。如果代理人的效用是全局凹的，那么每个$a \in [0, \bar{a}]$ 都是一个不动点$a \in a^{BR}(w^*(., a))$, 这看起来是一个比较苛刻的条件。实际上，从委托人的角度看，她不在乎是否$a \notin \arg\max_{a \in \mathbb{A}} V(w^*(., a), a)$是一个不动点，她只在乎$a^* \in \arg\max_{a \in \mathbb{A}} V(w^*(., a), a)$是否是一个不动点。这样，证明不动点的存在性的可能路径比全局凹性更为丰富。我们后面便提出一些基于不动点方法的一些应用。

3 不动点方法视角下的FOA有效性

在本节中，我们用不动点方法来去掉传统方法中多余的限制性条件。其中比较重要的限制性条件是为了保凹变换，委托人所提供的合约要求是来自单调递增的子空间，而MH合约却未必属于这样的函数子空间，在这种情况下，全局凹性似乎无法得以保证。另一方面，Rogerson (1985)[23] 很早就注意到，如果产出的分布不符合单调似然率性质(the monotone likelihood ratio property, MLRP)，当委托人为风险规避时，代理人可能付出的努力程度比委托人所想要的还要高，这个时候RIC约束对应的拉格朗日乘子可能是负的，在Rogerson (1985)[23]的方法下，无法证明(P3)与(P1)等价。在产出是一维的

情况下，这种情形可以用MLRP和凸性分布函数条件(Convex Distribution Function Condition，CDFC)来排除，但如Sinclair-Desgagne (1994)[24]所指出，在多维情形下，MLRP不能保证RIC 约束在双重放松问题(P3) 下也是紧的。在文献中，研究者们提出更为一般的随机占优概念来保证委托人的效用函数$V(w,a)$在a上递增，给定$w(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}$上非减。我们注意到从不动点的角度，也许μ非负的限制没有必要。

我们先介绍几个需要使用的随机占优的概念。

3.1 几个概念的定义

在文献中，以下一些概念被经常使用(见Sinclair-Desgagne, 1994[24]; Conlon, 2009a[2])。对任何下标h, 用$\mathbf{x}_{-h}$ 来记x_h，之外的信号，并记

$$Q(x_h^0,\mathbf{x}_{-h};a)=\int_{x_h\geqslant x_h^0} f(x_h,\mathbf{x}_{-h};a)dx_h$$

为一般化的上累积分布方程，从x_h^0开始往上累积。Sinclair-Desgagne (1994)[24] 做了以下假设:

定义 3.1 一般化随机占优*(Generalized Stochastic Dominance (GSD)):* 至少存在一个指标h 使得对所有的x_h^0和$\mathbf{x}_{-h}$，$Q(x_h^0,\mathbf{x}_{-h};a)$对$a$非递减，。

定义 3.2 一般化的上累积分布函数凹性*(Generalized Concave (Upper) Distribution Function Condition (GCDFC)):* 至少存在一个指标h, $Q(x_h^0,\mathbf{x}_{-h};a)$对$a$是凹的, 对所有$x_h^0$和$\mathbf{x}_{-h}$。

单调似然率可以定义如下(The monotone likelihood ratio property (MLRP))：

定义 3.3 分布函数$f(\mathbf{x},a)$满足单调似然率性质，如果对任意a, $l_a(\cdot;a)$ 非递减。

基于Conlon (2009a)[2]的定义，一个集合$\mathbf{E}\subseteq\mathbb{R}^K$被成为递增集，如果$\mathbf{x}\in\mathbf{E}$ 和$\mathbf{y}\geqslant\mathbf{x}$隐含了$\mathbf{y}\in\mathbf{E}$。基于这个定义，以下的概念可以看作是GSD的推广。

定义 3.4 分布函数$f(\mathbf{x},a)$ 满足递增集概率非递减*(the nondecreasing increasing-set probability (NISP)),*如果对每个递增集$\mathbf{E}$, 随机变量落入该集合的概率$\Pr(\tilde{\mathbf{x}}\in\mathbf{E}\,|a)$不随$a$增加而递减。

NISP比GSD更为一般，而且有时候比MLRP弱，原因是MLRP通常被二阶的全正则性所隐含，即TP_2 (进一步的讨论见Conlon, 2009a[2])。NISP意味着任何非递减的函数的期望值在分布函数$f(\mathbf{x},a)$ 下也对a而言也非递减，这个意义上说，具有“保增变换”的性质。特别地，在单维的随机变量情况下, NISP变成一阶随机占优(first-order stochastic dominance (FOSD)),一个在经济与统计中广泛使用的概念。相应地，二阶条件性质GCDFC 也可以被Conlon (2009a)[2] 所拓展：

定义 3.5 分布函数$f(\mathbf{x},a)$ 满足递增集概率凹性*)(the concave increasing-set probability (CISP)),* 如果对每个递增集$\mathbf{E}$, 随机落入该集合的概率$\Pr(\mathbf{x}\in\mathbf{E}\,|a)$对$a$是凹的。

于是Conlon (2009a)[2]用MLRP和CISP来证明代理人期望效用函数的全局凹性，进而证明FOA 有效。我们下一小节将证明MLRP实际上是多余的。

3.2 混合概率模型

混合概率模型是一组概率分布的凸组合:

$$f(\mathbf{x}, a) = \alpha(a)p_1(\mathbf{x}) + (1 - \alpha(a))p_2(\mathbf{x}), \tag{3.1}$$

这里$\alpha(.)$是某种$\mathbb{R}_+$ 到$[0,1]$的递增并二阶连续可微凹函数，并且满足$\alpha(0) = 0$ 和$\alpha(1) = 1$, 且$p_i(\mathbf{x}) > 0$ $(i = 1, 2)$，不等式至少对于有些$\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. 是严格的。现有文献的结果归结如下：

条件 3.1 *(Sinclair-Desgagne, 1994[24]).假定代理人效用在可分离并且$v(.)$ 和$u(.)$ 都是递增、严格凹的，那么，对于分布函数(3.1)，若$\frac{p_1(\mathbf{x})}{p_2(\mathbf{x})}$ 在$\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ (i.e., MLRP)上非递减,且GSD条件满足，则FOA 有效.*

混合概率模型之前被认为是一种满足CDFC的分布(Grossman and Hart, 1983[8]; Hart and Holmstrom, 1987[9]; Sinclair-Desgagne, 1994[24]). 但在Rogerson (1985)[23]以及Hart和Holmstrom (1987)[9] 的证明中, 可供选择的两种分布过于特别，需要满足十分苛刻的条件，也即两个分布必须按照MLRP排序,具有很强的局限性，特别在多信号的情形下，较少有分布能够满足MLRP排序。例如, $p_1(x)$ 以及$p_2(x)$ 都是正态分布密度函数, 同时$p_1(x)$相比于$p_2(x)$ 具有更大的均值和方差,则这两个分布便不满足MLRP。若$p_1(x)$ 和$p_2(x)$ 具有不同的函数形式(e.g., 一种为指数分布，另一种为对数正态分布)，这种情况下MLRP会更加难以得到满足。在二维正态分布时,即使$p_1(x_1, x_2)$ 、$p_2(x_1, x_2)$的方差相同，只要相关系数不同，则MLRP就无法满足。我们接下来将去掉MLRP条件来证的FOA的有效性。

性质 3.1 *假定A1-A3成立，并且$u(w, a)$满足$u_{wa} \leqslant 0$ 以及$u_{wwa} \leqslant 0$。则对于混合概率模型(3.1), FOA 在下来情形下有效：(i)委托人为风险中性；或者(ii)代理人的效用函数是可分离的正如$u(w, a) = u(w) - c(a)$。*

Proof MH合约下代理人的期望效用函数可写作

$$U(w_{\lambda,\mu}(., a), \tilde{a}) = \int u(w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x}, a), \tilde{a})[\alpha(\tilde{a})p_1(\mathbf{x}) + (1 - \alpha(\tilde{a}))p_2(\mathbf{x})]d\mathbf{x}.$$

因此,

$$\begin{aligned} U_{aa}(w_{\lambda,\mu}(., a), \tilde{a}) &= \underbrace{\alpha''(\tilde{a}) \int u(w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x}, a), \tilde{a})[p_1(\mathbf{x}) - p_2(\mathbf{x})]d\mathbf{x}}_{\text{A}} \\ &\quad \underbrace{+2\alpha'(\tilde{a}) \int u_a(w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x}, a), \tilde{a})[p_1(\mathbf{x}) - p_2(\mathbf{x})]d\mathbf{x}}_{\text{B}} \\ &\quad \underbrace{+\int u_{aa}(w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x}, a), \tilde{a})[\alpha(\tilde{a})p_1(\mathbf{x}) + (1 - \alpha(\tilde{a}))p_2(\mathbf{x})]d\mathbf{x}.}_{\text{C}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

根据假设$u_{aa} \leqslant 0$ ，项C非正。我们分以下两种情况讨论。

(i) 如果委托人是风险中性的,则$\mathbf{x}$只会通过影响比例似然比例$\frac{p_1(.)}{p_2(.)}$来影响$w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x}, a)$ 。首先我们将证明(P2) 的乘子μ对任意$a > 0$都是非负的。根据推论2.2, 对任意的a, 都存在唯

一的一组乘子$(\lambda(a),\mu(a))$. 通过运用Rogerson (1985)[23]的经典证明, 如果(P2$|a$)与(P3$|a$)等价, 那么RIC 约束条件的乘子$\mu^*(a)\geqslant 0$. 但如果(P2$|a$)与(P3$|a$) 不等价, 必然意味着(P2$|a$) 的乘子为负$\mu^*(a)<0$ 且(P3$|a$)乘子为0，即$\mu=0$以及$U_a(w_{\lambda^*(a),0}(.,a),a)\geqslant 0$。但是, 当$\mu=0$, $w_{\lambda^*,0}(\mathbf{x},a)$ 变为常数, 就会有

$$U_a(w_{\lambda^*(a),0}(.,a),a)=\int u_a(w_{\lambda^*,0}(\mathbf{x},a),a)f(\mathbf{x},a)d\mathbf{x}<0,$$

这与RIC相矛盾。因此，对任意的$a>0$, $\mu^*(a)\geqslant 0$.

第二步, 我们证明对任意的$\mu\geqslant 0$, $U_a(w_{\lambda,\mu}(.,a),\tilde{a})$ 在$\tilde{a}$上是全局凹的，所以任意目标努力水平a^* 都可以成为不动点。

令$r(q,\mu,a)>\underline{w}$ 解下列关于w 的方程

$$\frac{1}{u_w(w,a)}-\mu\frac{u_{aw}(w,a)}{u_w(w,a)}=q, \tag{3.3}$$

根据假设A1-A3,给定(λ,μ) ，$r(q,\mu,a)$在q上是递增的。因此, 当$\mu\geqslant 0$ 时, 只要$p_1(\mathbf{x})\geqslant p_2(\mathbf{x})$,

$$r(\lambda+\mu\frac{\alpha'(\tilde{a})(p_1(\mathbf{x})-p_2(\mathbf{x}))}{\alpha(\tilde{a})p_1(\mathbf{x})+(1-\alpha(\tilde{a}))p_2(\mathbf{x})},\mu,\tilde{a})\geqslant r(\lambda,\mu,\tilde{a})$$

这里，$r(\lambda,\mu,\tilde{a})$ 为常数。于是有,

$$\int u(w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a),\tilde{a})(p_1(\mathbf{x})-p_2(\mathbf{x}))d\mathbf{x}\geqslant u(r(\lambda,\mu,\tilde{a}),\tilde{a})\int(p_1(\mathbf{x})-p_2(\mathbf{x}))d\mathbf{x}=0$$

以及

$$\int u_a(w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a),\tilde{a})[p_1(\mathbf{x})-p_2(\mathbf{x})]d\mathbf{x}\leqslant u_a(r(\lambda,\mu,\tilde{a}),\tilde{a})\int[p_1(\mathbf{x})-p_2(\mathbf{x})]d\mathbf{x}=0.$$

于是

$$U_{aa}(w_{\lambda,\mu}(.,a),\tilde{a})\leqslant 0 \tag{3.4}$$

同时(3.4)只有在$w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a)$ 为常数时取得等号。如果$w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a)$为常数, 则FOA有效. 否则, 对任意的$(a,\lambda)$，$U_a(w_{\lambda,\mu}(.,a),\tilde{a})$ 在$\tilde{a}$ 上递减, 同时有$\mu\geqslant 0$，因而FOA有效.

(ii) 在可分离效用函数形式下, 注意到$\alpha(.)$ 是凹函数. 因此, $\alpha^{-1}(.)$ 是凸函数, 继而$c(\alpha^{-1}(.))$ 也是凸函数。这可以通过重新定义变量α 为选择变量而证得。因此，不论委托人的偏好如何，都会有

$$U_{\alpha\alpha}(w_{\lambda,\mu}(.,\alpha),\tilde{\alpha})=-c''(\tilde{\alpha})\leqslant 0,$$

从而FOA 有效.

如果代理人的效用函数是不可分的, 委托人也不是风险中性的, 我们同样得以得到使FOA有效的且相比较于MLRP更为宽松的充分条件。如在任意递增集$\mathbf{E}$中，$\mathrm{Pr}_1(\tilde{\mathbf{x}}\in\mathbf{E})\geqslant\mathrm{Pr}_2(\tilde{\mathbf{x}}\in\mathbf{E})$。我们在本文中略去了这部分结果(见Ke, 2010[16])。

为了说明这里证明方法的不同, 我们回到Rogerson(1985)[23] 的方法, 即要证明最初问题与双重放松后的问题的等价性。这首先要证$\mu>0$。因此, 需要综合NISP 和MLRP 条件

来证明在最优的(w^*, a^*) 下, $V_a(w^*, a^*) > 0$ 。但在不动点的角度看，事先证明$V_a(w^*, a^*) > 0$并非必要。†† 事实上,当委托人是风险厌恶时,根据部分(ii), 我们允许在最优选择下$\mu < 0$的情况发生。Kirkegaard (2017a[18],2017b[19]) 用另一种方法在混合概率模型下也得到了与我们类似的结果。

3.3 不需要CISP, NISP 以及MLRP 的指数分布族

这一小节我们将证明在一些类型的指数族分布函数下，MLRP和NISP条件都可以被替换成更宽松的临界条件, 同时CISP也同样可以被放松。考虑特殊的指数族形式

$$f(\mathbf{x}, a) = \frac{e^{a\eta(\mathbf{x})}\kappa(\mathbf{x})}{\int e^{a\eta(\mathbf{x})}\kappa(\mathbf{x})d\mathbf{x}}. \tag{3.5}$$

对于分布函数(3.5), 我们可以把似然率写成

$$l_a(\mathbf{x}, a) = \eta(\mathbf{x}) - \mathbb{E}\eta(\mathbf{x}),$$

单调似然率要求$\eta(\mathbf{x})$是单调的。而CISP在单调的$\eta(\mathbf{x})$ 不被满足。为了看清这点，记$\mathcal{X}^z = \{\mathbf{x} : \eta(\mathbf{x}) \geqslant z;\ z \in \mathbb{R}\}$为上水平集，临界值为$z$。在MLRP假设下，$\eta(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}$上非递减(这也意味着NISP)，因而$\mathcal{X}^z$是一个递增集。但是对于充分大的$z$

$$\frac{d^2}{da^2}\Pr(\mathbf{x} \in \mathcal{X}^z\,|a) = \int_{\mathcal{X}^z} f_{aa}(\mathbf{x}, a)d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{X}^z}[(\eta(\mathbf{x}) - \mathbb{E}\eta(\mathbf{x}))^2 - Var(\eta(\mathbf{x}))]f(\mathbf{x}, a)d\mathbf{x} > 0, \tag{3.6}$$

这必定违反CISP。‡‡ 我们要考虑的问题是，当这个单调性不满足之后，代理人的效用函数是否还能为凹函数。我们证明了，在没有MLRP 和CISP的情形下，只要有

$$\frac{\sup_{\mathbf{x}} \eta(\mathbf{x}) - \mathbb{E}\eta(\mathbf{x})}{\sqrt{Var(\eta(\mathbf{x}))}} \leqslant 1, \tag{3.7}$$

即, 似然率的最大值小于其标准差时, FOA有效。条件(3.7) 依旧可能是过于严格的条件，但至少其放宽了同时满足CISP 与MLRP的条件。

性质 3.2 *假定委托人风险中性，$u_{wa} \leqslant 0$ 和$u_{wwa} \leqslant 0$ 且$u(w, a)$对w 和a 分别是凹的。如果指数族(3.5) 满足(3.7), 则FOA有效.*

Proof 我们的重点在于研究关于随机变量$\mathbf{x}$的转换函数$\eta(.)$ 。首先，通过采用在命题3.1的部分(i)证明所使用过的相同的思路，我们可以证明(P2)中的$\mu \geqslant 0$。第二步，全局凹性可以通过条件(3.7) 以如下方法证明。我们可以将全集分为下两个部分: $\mathcal{X}^- = \{\mathbf{x} : \eta(\mathbf{x}) - \mathbb{E}\eta(\mathbf{x}) \leqslant -\sqrt{Var(\eta(\mathbf{x}))}\}$ 以及$\mathcal{X}^+ = \{\mathbf{x} : \eta(\mathbf{x}) - \mathbb{E}\eta(\mathbf{x}) > -\sqrt{Var(\eta(\mathbf{x}))}\}$. 因此, 当$\mu \geqslant 0$,

††Jewitt(1988)[12] 的证明通过委托人风险中性的的假设避免了这个条件，但结论在多维信号分布下不再适用。

‡‡以一维的信号为例，$\eta(.) = x$，注意到$\frac{f_{aa}}{f} = l_a^2 + l_{aa} = (x - m(a))^2 - Var(x)$是$x$的二次函数并且两次穿过$x$轴，所以$F_{aa} = \int^x \frac{f_{aa}}{f} f dx$ 与x单交叉并从上方往下穿过,CDFC自然不可能满足。

对任意的a, $\hat{a}$, 以及$\tilde{a}$, 我们有

$$\begin{aligned}
& \int u(w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a),\hat{a})f_{aa}(\mathbf{x},\tilde{a})d\mathbf{x} \\
= & \int u(r(\lambda+\mu[\eta(\mathbf{x})-\mathbb{E}\eta(\mathbf{x})],\mu,a),\hat{a}))(\eta(\mathbf{x})-\mathbb{E}\eta(\mathbf{x}))^2-Var(\eta(\mathbf{x}))f(\mathbf{x},\tilde{a})d\mathbf{x} \\
\leqslant & \; u(r(\lambda-\mu\sqrt{Var(\eta(\mathbf{x}))},\mu,a),\hat{a}))\int_{\mathcal{X}^-}(\eta(\mathbf{x})-\mathbb{E}\eta(\mathbf{x}))^2-Var(\eta(\mathbf{x}))f(\mathbf{x},\tilde{a})d\mathbf{x} \\
& +u(r(\lambda-\mu\sqrt{Var(\eta(\mathbf{x}))},\mu,a),\hat{a}))\int_{\mathcal{X}^+}(\eta(\mathbf{x})-\mathbb{E}\eta(\mathbf{x}))^2-Var(\eta(\mathbf{x}))f(\mathbf{x},\tilde{a})d\mathbf{x} \\
= & \; 0.
\end{aligned}$$

其中$r(.,\mu,a)$ 即为(3.3)里的定义.

类似的，

$$\int u_a(w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a),\hat{a})f_a(\mathbf{x},\tilde{a})d\mathbf{x}=\int u_a(r(\lambda+\mu[\eta(\mathbf{x})-\mathbb{E}\eta(\mathbf{x})],a),\hat{a}))(\eta(\mathbf{x})-\mathbb{E}\eta(\mathbf{x}))f(\mathbf{x},\tilde{a})d\mathbf{x}\leqslant 0.$$

因此, $U_{aa}(w_{\lambda,\mu}(.,a),\tilde{a})\leqslant 0$. 通过与命题3.1里的证明类似的方法可得, FOA 有效。

3.4 其他特殊类型

LiCalzi 和Spaeter (2003) [20]提出了以下类型的分布:

$$F(x,a)=x+\beta(x)\gamma(a), \tag{3.8}$$

其中$x\in[0,1]$, $\beta(x)$ 是位于$[0,1]$ 且非负, 同时有$\beta(0)=\beta(1)=0$ 以及$|\beta'(x)|\leqslant 1$, $\gamma(a)$ 是递减凸函数。Conlon (2009b) [3]同样考虑了多维分布的扩展情况(3.8).在LiCalzi 和Spaeter (2003)[20]早期研究里,在同时满足CDFC 与MLRP 条件的情况下, $\beta(x)$ 必然是凹函数. 但根据本的文不动点方法,凹函数的假定是多余的。

性质 3.3 *假定代理人效用可分离并假定$u(.)$ 和$v(.)$是递增且严格凹函数。如果$x\in\mathbb{R}$, $\pi(x)$ 是非递减的, 那么对于分布(3.8), FOA有效.*

3.5 例子

假定代理人货币效用函数是$u(w)=2\sqrt{w}$，努力的成本函数是$c(a)=a^2$，外部保留效用$\underline{U}=0$，$x\sim\mathcal{N}(a,a)$, 符合正态分布，这里努力$a\in[0,1]$同时影响了产出的均值与方差。在这个例子中, 似然率$l_a(x,a)=\frac{x^2-a^2-a}{2a^2}$不满足一阶随机占优FOSD，更不可能满足MLRP。在$\mathcal{MH}$合约下，代理人期望效用写成

$$U(w_{\lambda,\mu}(.,a),\tilde{a})=(\frac{\mu}{a^2}-1)\tilde{a}^2+\frac{\mu}{a^2}\tilde{a}+2\lambda-\mu,$$

因此，期望效用不是全局凹的。我们把两个乘子解出来之后$\lambda^*(a)=\frac{1}{2}a^2$ and $\mu^*(a)=\frac{2a^3}{1+2a}$, 和

$$w^*(x,a)=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a(x^2-a^2-a)}{1+2a}\right)^2$$

这样，得到最终的期望效用

$$U(w^*(.,a),\tilde{a}) = -\frac{1}{1+2a}(\tilde{a}-a)^2$$

唯一的最优反应刚好是a,也即不动点

$$a^{BR}(w^*(.,a)) = a$$

因此在这个例子中，FOA有效，最优的解是$a^* = 0.627$.

4 主要结论

本文提出一种从不动点的角度看待FOA有效性的方法。与现有的文献中的方法比，不动点方法的优势是可以去掉一些全局凹性方法中不必要的限制性条件。原则上说，不动点方法并不要求代理人的货币支付在最优合同下具有单调性以及代理人期望效用函数的全局凹性。我们证明了在概率混合模型中(Holmstrom and Hart,1987[9])，FOA有效但无须MLRP 条件，以及在一些特殊的指数族概率分布函数中，CISP和MLRP都不是FOA 有效的必要条件。这个方法为将来寻找更为一般的使FOA有效的条件打开了一个新窗口。如何利用最优反应映射的一些拓扑性质来研究不动点进而探索FOA将是将来有趣的研究课题。

5 附录

5.1 Lemma 2.1的证明

Proof 第一步 有界拉格朗日乘子的存在性

假定对任意的a, (P2$|a$) 有解$\tilde{w}^*$ ($\tilde{w}^*$ 可测以及几乎处处连续)。我们采用变分法来证明有界拉格朗日乘子的存在性(进一步分析见Luenberger, 1969 [21])。我们首先考虑RIC 约束条件取等号的情况，之后再扩展到不等号的情况。

第一分步 证明对任意的a，有界拉格朗日乘子的存在性。

记$h(\mathbf{x}) \geqslant 0$ 为任一偏离函数，满足$h(\bar{\mathbf{x}}) = h(\underline{\mathbf{x}}) = 0$，且$h(\mathbf{x}) = 0$如果$\tilde{w}^* = \underline{w}$。如果有

$$\tilde{w}^* \in \arg\max_{w}\{V(w,a) : U(w,a) \geqslant \underline{U},\, U_a(w,a) = 0\},$$

那么可以证明，对任意的$h(\mathbf{x}) \geqslant 0$,

$$0 \in \arg\max_{z\in\mathbb{R}}\{V(\tilde{w}^*+zh,a) : U(\tilde{w}^*+zh,a) \geqslant \underline{U},\, U_a(\tilde{w}^*+zh,a) = 0\}.$$

根据受约束的最大化问题构造关于$z \in \mathbb{R}$的拉格朗日函数,

$$L(\tilde{w}^*+zh,a;\lambda,\mu) = V(\tilde{w}^*+zh,a) + \lambda[U(\tilde{w}^*+zh,a) - \underline{U}] + \mu U_a(\tilde{w}^*+zh,a),$$

注意到由于$u_w(.,a) > 0$ ，$\frac{\partial}{\partial z}U(\tilde{w}^*+zh,a) > 0$ 以及由于$v'(.) > 0$, $\frac{\partial}{\partial z}V(\tilde{w}^*+zh,a) < 0$; 因此存在拉格朗日乘子向量(λ,μ)，使得满足最大化的$z^* = 0$ 同样也是$L(\tilde{w}^*+zh,a;\lambda,\mu)$的稳定点, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial z}L(\tilde{w}^*+zh,a;\lambda,\mu)\,|_{z=0} = 0$$

以及以下两个约束条件

$$\begin{aligned}\lambda[U(\tilde{w}^*+zh,a)-\underline{U}] &= 0,\ \lambda\geqslant 0,\ U(\tilde{w}^*+zh,a)\geqslant \underline{U}\\ U_a(\tilde{w}^*+zh,a) &= 0\end{aligned}$$

在$z^*=0$ 时也同样满足.

又因为，对任意的$h(\mathbf{x})\geqslant 0$，都有$\frac{\partial}{\partial z}L(\tilde{w}^*+zh,a;\lambda,\mu)\,|_{z=0}=0$，而又有支撑条件$f(\mathbf{x},a)>0$ 几乎处处满足, 我们有

$$\int\{-v'(\pi-\tilde{w}^*)+\lambda u_w(\tilde{w}^*,a)+\mu[u_{aw}(\tilde{w}^*,a)+u_w(\tilde{w}^*,a)l_a]\}h(\mathbf{x})f(\mathbf{x},a)d\mathbf{x}=0,$$

这给出了一阶条件

$$-v'(\pi-\tilde{w}^*)+\lambda u_w(\tilde{w}^*,a)+\mu[u_{aw}(\tilde{w}^*,a)+u_w(\tilde{w}^*,a)l_a]=0 \tag{FOC}$$

只要$\tilde{w}^*\geqslant \underline{w}$，给定常数$\lambda$ 和μ。显然, $\tilde{w}^*$ 属于MH 合约的类型, 同时常数λ 与μ 也满足以下两个约束条件

$$U_a(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)=0$$

以及

$$\lambda[U(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)-\underline{U}]=0,\ \lambda\geqslant 0,\ U(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)\geqslant \underline{U}$$

记$(\lambda(a),\mu(a))$ 为给定a下满足上述两个约束条件的(λ,μ) 的集合。

第二分步 $(\lambda(a),\mu(a))$的上半连续性与凸性

从第一分步可知, 因为拉格朗日乘子存在, 对任意的$(\lambda,\mu)\in(\lambda(a),\mu(a))$, 最大化问题的解$w_{\lambda,\mu}(.,a)$ 就是拉格朗日函数的稳定点

$$L(w,a;\lambda,\mu)=V(w,a)+\lambda[U(w,a)-\underline{U}]+\mu U_a(w,a).$$

同时, (λ,μ) 也是下述方程组的解

$$\begin{cases}\lambda[U(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)-\underline{U}]=0,\ \lambda\geqslant 0,\ U(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)\geqslant \underline{U}\\ U_a(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)=0.\end{cases}$$

注意到，根据最大值定理，$U(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)$ 与$U_a(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)$ 在(λ,μ)上是上半连续性(upper hemi-continuous)的因此, 集合$(\lambda(a),\mu(a))$ 在a 也是上半连续性的。

我们接下来证明凸性。注意到$z^*=0$ 是关于z的函数$L(\tilde{w}^*+zh,a;\lambda,\mu)$的稳定点。因此，对足够小的区间$[0,\varepsilon)$, $z^*=0$ 是函数$L(\tilde{w}^*+zh,a;\lambda,\mu)$ 的局部极值(最大值或者最小值)。如果(λ^*,μ^*) 和$(\lambda^{*\prime},\mu^{*\prime})$ 是关于(P2$|a$) 的两个拉格朗日乘子, 则对任意的$\alpha\in[0,1]$, 我们有

$$\begin{aligned}V(\tilde{w}^*,a) &= \alpha L(\tilde{w}^*,a;\lambda^*,\mu^*)+(1-\alpha)L(\tilde{w}^{*\prime},a;\lambda^{*\prime},\mu^{*\prime})\\ &= \alpha\cdot\underset{z\in[0,\varepsilon)}{exe}L(\tilde{w}^*+zh,a;\lambda^*,\mu^*)+(1-\alpha)\cdot\underset{z\in[0,\varepsilon)}{exe}L(\tilde{w}^*+zh,a;\lambda^{*\prime},\mu^{*\prime})\end{aligned}$$

其中exe 代表极值。因此, $z^*=0$ 是$L(\tilde{w}^*+zh,a;\alpha\lambda^*+(1-\alpha)\lambda^{*\prime},\alpha\mu^*+(1-\alpha)\mu^{*\prime})$ 关于z 的稳定点，同时$\alpha(\lambda^*,\mu^*)+(1-\alpha)(\lambda^{*\prime},\mu^{*\prime})$ 满足互补松弛条件

$$\begin{cases} \lambda[U(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)-\underline{U}]=0,\ \lambda\geqslant 0,\ U(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)\geqslant\underline{U} \\ U_a(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)=0. \end{cases}$$

最后, 我们得到结论: 如果(λ^*,μ^*), $(\lambda^{*\prime},\mu^{*\prime})\in(\lambda(a),\mu(a))$, 那么$\alpha(\lambda^*,\mu^*)+(1-\alpha)(\lambda^{*\prime},\mu^{*\prime})\in(\lambda(a),\mu(a))$, 这意味着集合$(\lambda(a),\mu(a))$是凸的.

第三分步关于a 的最优化.

下一步在于选择a 来实现

$$\max_a\{V(w_{\lambda,\mu}(.,a),a):(\lambda,\mu)\in(\lambda(a),\mu(a))\},\tag{A1}$$

其中$w_{\lambda,\mu}(.,a)$ 代表$L(w,a;\lambda,\mu)$的稳定点。显然，这样的a^* 存在，因为目标函数是上半连续函数。

第二步 RIC取不等号的情况

只有当$a\in\{0,\bar{a}\}$ 时，RIC 约束条件才可能不取等号。首先，对于$a=0$,根据假设$U(\underline{w},0)=\underline{U}$,我们可以直接去掉RIC约束，$\underline{w}$ 即为最优解。所以只需要考虑$a=\bar{a}$。这时，$(\mathrm{P2}|a)$ 等价于下述简单问题

$$\max_w\{V(w,a):U(w,a)\geqslant\underline{U}\}.$$

我们可以用类似第一步的方法来证明$\lambda(a)$ 的凸性, 其中$\mu(a)=0$ 已省略。

5.2 推论2.1的证明

Proof 这部分的证明将在证明了推论2.2 后再进行(证明见附录5.3)。

5.3 推论2.2的证明

Proof 第一步:从λ 到μ 的映射

前文已假定$u(.,a)$ 和$v(.)$ 为凹函数, $u_a\leqslant 0$, $u_{aw}\leqslant 0$, 以及$u_{aww}\leqslant 0$, 因此，如果$\mu\geqslant 0$，那么$\frac{v'(\pi-w)}{u_w(w,a)}-\mu\frac{u_{aw}(w,a)}{u_w(w,a)}$ 在w上是单调增函数。因此问题的解$w_{\lambda,\mu}(.,a)$ 唯一，故给定的a，$w_{\lambda,\mu}(.,a)$对(λ,μ) 连续并几乎处处可微。我们首先寻找对任意给定μ 下的最优λ 。注意到对任意的a 以及μ, 只要$w_{\lambda,\mu}(.,a)\geqslant\underline{w}$,

$$\frac{\partial w_{\lambda,\mu}(.,a)}{\partial\lambda}=-\frac{u_w^2}{(v''u_w+v'u_{ww})+\mu(u_{aww}u_w-u_{aw}u_{ww})}>0,$$

其中，由于$u_{aww}\leqslant 0$ 和$u_{aw}\leqslant 0$,所以分母为负，同时关于w的二阶条件得以满足。因此，$\int u(w_{\lambda,\mu}(x,a),a)f(x,a)dx$ 在λ上严格递增。所以, 不论$U(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)=\underline{U}$ 有唯一解$\lambda\geqslant 0$ 或者$U(w_{\lambda,\mu}(.,a),a)>\underline{U}$ 对任意的λ (后者意味着$\lambda=0$)。不论如何, λ 唯一, 记为$\lambda(a,\mu)$ ，而根据唯一性, $\lambda(a,\mu)$ 在μ上连续并几乎处处可微。

第二步: 求解μ

注意到只要$w_{\lambda,\mu}(.,a)\geqslant\underline{w}$,

$$\frac{\partial w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a)}{\partial\mu}=-\frac{u_w^2}{(v''u_w+v'u_{ww})+\mu(u_{aww}u_w-u_{aw}u_{ww})}(l_a+\frac{u_{aw}}{u_w}).$$

如果$\lambda(a,\mu)=0$, 对任意给定的a,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\mu}[u(w_{0,\mu}(\mathbf{x},a),a)l_a(\mathbf{x},a)+u_a(w_{0,\mu}(\mathbf{x},a),a)]\\=\quad&-(u_w+u_{aw}l_a)^2\frac{u_w}{(v''u_w+v'u_{ww})+\mu(u_{aww}u_w-u_{aw}u_{ww})}>0,\end{aligned}$$

其中最后一行的分母根据$w_{\lambda,\mu}(x,a)$的定义同样为负。因此，

$$U_a(w_{0,\mu}(\mathbf{x},a),a)=\int[u(w_{0,\mu}(\mathbf{x},a),a)l_a(\mathbf{x},a)+u_a(w_{0,\mu}(\mathbf{x},a),a)]f(\mathbf{x},a)d\mathbf{x}$$

在μ 上严格递增.

接下来证明拉格朗日乘子μ 的存在性. 注意到当$\mu\to-\infty$, 对任意的$\lambda=0$, 一阶条件(2.3)意味着

$$w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a)=\begin{cases}\infty \text{ if } l_a(\mathbf{x},a)<0\\ \underline{w} \text{ if } l_a(\mathbf{x},a)>0.\end{cases}$$

因此，在给定$l_a(\mathbf{x},a)<0$有正概率的条件下. $U(w_{0,\mu}(\mathbf{x},a),a)>0$。根据定义，我们有$\lambda(a,-\infty)=0$. 因此, 当$\mu\to-\infty$,

$$\int u(w_{\lambda(a,\mu),\mu}(\mathbf{x},a),a)f_a(\mathbf{x},a)d\mathbf{x}+\int u_a(w_{\lambda(a,\mu),\mu}(\mathbf{x},a),a)f(\mathbf{x},a)d\mathbf{x}<0.$$

如果$\mu\to\infty$, 类似地，我们同样有$\lambda(a,\infty)=0$ 以及

$$w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a)=\begin{cases}\infty \text{ if } l_a(\mathbf{x},a)>0\\ \underline{w} \text{ if } l_a(\mathbf{x},a)<0.\end{cases}$$

所以，

$$\int u(w_{\lambda(a,\mu),\mu}(\mathbf{x},a),a)f_a(\mathbf{x},a)d\mathbf{x}+\int u_a(w_{\lambda(a,\mu),\mu}(\mathbf{x},a),a)f(\mathbf{x},a)d\mathbf{x}>0.$$

给定$U_a(w_{\lambda(a,\mu),\mu}(\mathbf{x},a),a)$ 在μ 上连续, 根据中值定理，存在μ 满足$U_a(w_{\lambda(a,\mu),\mu}(\mathbf{x},a),a)=0$ 。

接下来我们证明满足$U_a(w_{\lambda(a,\mu),\mu}(\mathbf{x},a),a)=0$ 的μ 唯一。假设不唯一，那么，存在至少两个关于(P2|a)的最优解(在正测度集上不同)。根据$L(.,a;\lambda,\mu_1)$的单峰性质（逐点），我们有

$$V(w_{\lambda(a,\mu_1),\mu_1}(.,a),a)=\max_{w\geqslant\underline{w}}L(w,a;\lambda(a,\mu_1),\mu_1)>L(w_{\lambda(a,\mu_2),\mu_2}(\mathbf{x},a),a;\lambda(a,\mu_1),\mu_1)$$

以及

$$V(w_{\lambda(a,\mu_2),\mu_2}(.,a),a)=\max_{w\geqslant\underline{w}}L(w,a;\lambda(a,\mu_2),\mu_2)>L(w_{\lambda(a,\mu_1),\mu_1}(\mathbf{x},a),a;\lambda(a,\mu_2),\mu_2).$$

将上述两不等式加总并消去重复项得到

$$\begin{aligned}&\lambda(a,\mu_1)[U(w_1,a)-\underline{U}]+\mu_1U_a(w_1,a)+\lambda(a,\mu_2)[U(w_2,a)-\underline{U}]+\mu_2U_a(w_2,a)\\>\quad&\lambda(a,\mu_1)[U(w_2,a)-\underline{U}]+\mu_1U_a(w_2,a)+\lambda(a,\mu_2)[U(w_1,a)-\underline{U}]+\mu_2U_a(w_1,a),\end{aligned}$$

其中$w_i = w_{\lambda(a,\mu_i),\mu_i}(.,a)$.

注意到$\lambda(a,\mu_1)[U(w_1,a)-\underline{U}] = \lambda(a,\mu_2)[U(w_2,a)-\underline{U}] = 0$, 上述的不等式变为

$$(\mu_1-\mu_2)[U_a(w_1,a)-U_a(w_2,a)] > \lambda(a,\mu_1)[U(w_2,a)-\underline{U}] + \lambda(a,\mu_2)[U(w_1,a)-\underline{U}].$$

又因为$U(w_i,a)-\underline{U} \geqslant 0$ 以及$\lambda(a,\mu_i) \geqslant 0$, 所以右边项总是非负的。所以我们有

$$(\mu_1-\mu_2)[U_a(w_1,a)-U_a(w_2,a)] > 0,$$

这与假设$U_a(w_1,a) = U_a(w_2,a) = 0$ 矛盾。

特别地，当委托人是风险中性时，我们可以证明，当$\mu = 0$时，对一些$\lambda(a,0) > 0$, $U_a(w_{\lambda(a,0),0}(.,a),a) < 0$, 因此RIC约束条件的拉格朗日乘子为正。

我们接下来证明推论2.1。当效用函数可分离时，$u_{aw} = u_{aww} = 0$, 因此存在唯一满足一阶条件(2.3)的MH合约$w_{\lambda,\mu}(\mathbf{x},a)$ ，不管μ 的符号是否为正。显然, $\frac{\partial w_{\lambda,\mu}(.,a)}{\partial \lambda} > 0$ ，所以剩余部分证明同理。

5.4 命题3.3的证明

Proof 基于定理2.1, 如果能证明以下单交叉条件，则FOA有效

$$\int u(w^*(x,a))f_a(x,\tilde{a})dx - c'(\tilde{a}) < \int u(w^*(x,a))f_a(x,a)dx - c'(a) = 0 \text{ if } \tilde{a} > a \qquad \text{(SCC)}$$

对于任意$\tilde{a}, a \in \mathbb{A}$, 反之也然。条件(SCC) 意味着在MH合约$w^*(x,a)$下,代理人的期望效用函数是单峰的。如果$\tilde{a} > a$, 则$c'(\tilde{a}) \geqslant c'(a)$, 只要证

$$\int u(w^*(x,a))f_a(x,\tilde{a})dx < \int u(w^*(x,a))f_a(x,a)dx \text{ if } \tilde{a} > a,$$

反之也然。对于分布于函数(3.8), 我们有

$$f_a(x,a) = \beta'(x)\gamma'(a)$$

因而

$$\int u(w^*(x,a))f_a(x,\tilde{a})dx = \frac{\gamma'(\tilde{a})}{\gamma'(a)}\int u(w^*(x,a))f_a(x,a)dx.$$

注意到当$\int u(w^*(x,a))f_a(x,a)dx = c'(a) \geqslant 0$ 和$\frac{\gamma'(\tilde{a})}{\gamma'(a)} \leqslant 1$当且仅当$\tilde{a} \geqslant a$, 所以单交叉条件(SCC)成立。所以FOA有效。这个结果也可以推广到多维信号的例子，诸如$F(\mathbf{x},a) = \sum \alpha_i x_i + \beta(\mathbf{x})\gamma(a)$.

参考文献

[1] Alvi E. First-order approach to principal-agent problems: a generalization[J]. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 1997, **22(1)**: 59-65.

[2] Conlon J R. Two new conditions supporting the first-order approach to multisignal principal-agent problems [J], *Econometrica*, 2009a, **77(1)**: 249-278.

[3] Conlon J R. Supplement to 'Two new conditions supporting the first-order approach to multisignal principal-agent problems', *Econometrica Supplementary Material*, 2009b, **77**, `http://www.econometricsociety.org/ecta/supmat/6688\_proofs.pdf`.

[4] Dempe S. Foundations of bilevel programming[M]. Springer Science & Business Media, 2002.

[5] Dempe S, Zemkoho A B. Bilevel optimization: advances and next challenges[M]. Springer 927 Optimization and its Applications, 2020, vol. 161.

[6] Fagart M C, Sinclair-Desgagne B. Ranking contingent monitoring systems[J]. *Management Science*, 2007, **53(9)**: 1501-1509.

[7] Gauvin J. A necessary and sufficient regularity condition to have bounded multipliers in nonconvex programming[J]. *Mathematical Programming*, 1977, **12(1)**: 136-138.

[8] Grossman S J, Hart O D. An analysis of the principal-agent problem[J]. *Econometrica*, 1983, **51**: 7-45.

[9] Hart O, Holmstrom B. The Economics of Contracts[C]//Advances in Economic Theory: Proceedings of the Fifth World Congress of the Econometric Society, ed. by Bewley T F. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1987.

[10] Holmstrom B. Moral hazard and observability[J]. *The Bell journal of economics*, 1979, **10**: 74-91.

[11] Jung J Y, Kim S K. Information space conditions for the first-order approach in agency problems[J]. *Journal of Economic Theory*, 2015, **160**: 243-279.

[12] Jewitt I. Justifying the first-order approach to principal-agent problems[J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1988, **56**: 1177-1190.

[13] Jewitt I, Kadan O, Swinkels J M. Moral hazard with bounded payments[J]. *Journal of Economic Theory*, 2008, **143(1)**: 59-82.

[14] Kadan O, Reny P J, Swinkels J M. Existence of optimal mechanisms in principal-agent problems[J]. *Econometrica*, 2017, **85(3)**: 769-823.

[15] Ke R. Essays on Contract Theory[D]. Ph.D Thesis, MIT, 2009.

[16] Ke R. A fixed-point method for validating the first-order approach[R]. *Working Paper, Chinese University of Hong Kong*, 2010.

[17] Ke R, X Xu. On the existence of optimal contract in the pure moral hazard problems[R]. *Working paper, Zhejiang University*, 2021.

[18] Kirkegaard R. Moral hazard and the spanning condition without the first-order approach[J]. *Games and Economic Behavior*, 2017a, **102**: 373-387.

[19] Kirkegaard R. A unifying approach to incentive compatibility in moral hazard problems[J]. *Theoretical Economics*, 2017b, **12(1)**: 25-51.

[20] LiCalzi M, Spaeter S. Distributions for the first-order approach to principal-agent problems[J]. *Economic Theory*, 2003, **21(1)**: 167-173.

[21] Luenberger D G. Optimization by vector space methods[M]. New York, USA: John Wiley & Sons, 1969.

[22] Mirrlees J. Theory of moral hazard and unobservable behavior: Part I[J]. *Review of Economic Studies*, 1975 or 1999, **66**: 3-21.

[23] Rogerson W P. The first-order approach to principal-agent problems[J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1985, **53**: 1357-1367.

[24] Sinclair-Desgagne B. The first-order approach to multi-signal principal-agent problems[J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1994, **62**: 459-465.

[25] 柯荣住, 李晋. 霍姆斯特朗的契约理论“四重奏”. 财新观点, 2016. [2016-10-25] `https://opinion.caixin.com/2016-10-25/101000367.html`

[26] 聂辉华. 不完全契约理论对中国改革的启迪. 财新博客, 2016. [2016-10-11] `http://niehuihua.blog.caixin.com/archives/152331`